FUNCIONES CONTINUAS CON MÁXIMOS LOCALES DENSOS

GODOFREDO IOMMI

Abstract. En estas notas estudiaremos la clase de funciones continuas que poseen máximos estrictos locales en un conjunto denso. Siguiendo el trabajo de Posey y Vaughan construiremos un ejemplo explícito de una función que pertenece a dicha clase. Finalmente, siguiendo a Dorbot y Morayne, probaremos que el conjunto de funciones con máximos densos es residual. Proponemos además algunos problemas.

1. Introducción

Las funciones continuas son, en general, bastante menos regulares de lo que de lo que podría esperrase. Un ejemplo clásico de lo anterior son las funciones continuas no diferenciables en ningún punto. Hasta antes de 1850 la idea de que las funciones continuas eran diferenciables excepto, a lo más, en un número finito de puntos, estaba absolutamente extendida. Por ejemplo, en el texto de Cálculo de J.L. Raabe, *Die Differential-und Integralrechning*, publicado en 1839, la afirmación anterior aperece como Teorema. En 1861 Riemann propuso la siguiente función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

Esta función es continua en toda la recta real, sin embargo no es diferenciable en ningún punto irracional (resultado que fue probado por Hardy en 1916). Sin embargo, existen infinitos puntos racionales donde la función es diferenciable. Tras los trabajos de Bolzano, Hankel y varios otros, finalmente en 1872 Karl Weierstrass probó que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

donde $a \in \mathbb{N}$ es impar, $b \in (0,1)$ y $ab > 1 + 3\pi/2$ es continua en toda la recta real y no es diferenciable en ningún punto. Es interesante recalcar que la mayoría de los ejemplos de este tipo de funciones se construyen utilizando series de funciones.

La situación es aún más sorprendente. Los ejemplos anteriores no son la excepción. Es posible demostrar que, en un sentido preciso, la mayoría de las funcions continuas no son diferenciables en ningún punto.

Estas notas estan dedicadas a otra clase de funciones que ha recibido mucho menos atención. A saber, funciones continuas tales que el conjunto de máximos locales estrictos (ver Definición 1.1) es denso en el dominio. Para esta clase de funciones

---

Date: June 29, 2011.

GI fue parcialmente financiado por el Proyecto Fondecyt 1110040.

es posible obtener resultados análogos a los de las funciones continuas no diferenciables. En particular, es posible contruir ejemplos explícitos utilizando series de funciones (ver Sección 2) y es posible probar que la mayoría de las funciones continuas satisface esta propiedad (ver Sección 3). Desarrollaremos estas ideas además de propner algunos problemas. A continuación definiremos de un modo preciso la clase de funciones que vamos a considerar.

Definición 1.1. Diremos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posee un *máximo local estricto* en $x = c$ si existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in (c-\epsilon, c+\epsilon)$ se tiene que $f(c) > f(x)$ (análogamente podemos definir *mínimo local estricto*).

Dada una función $f : K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definimos el conjunto de máximos locales estrictos de f por

$$M(f) := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es un máximo local estricto para } f\}.$$

Schoenflies [Sc] en 1900 demostró que el conjunto de puntos máximos locales estrictos de una función continua es a lo más numerable.

Teorema 1.1 (Schoenflies 1900)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces el conjunto $M(f)$ es a lo más numerable.*

Proof. Consideremos el conjunto de intervalos abiertos con extremos racionales,

$$\mathcal{B} := \{(a,b) \subset \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

El conjunto $\mathcal{B}$ es una base numerable de la topología usual en $\mathbb{R}$. Para cada máximo local estricto $x \in \mathbb{R}$ de f sea $(a_x, b_x) \in \mathcal{B}$ un intervalo tal que si $x \in (a_x, b_x)$ y si $y \in (a_x, b_x) \setminus \{x\}$ entonces $f(y) < f(x)$. El resultado se obtiene notando que la correspondencia $x \mapsto (a_x, b_x)$ es uno a uno. $\square$

No es difícil construir una función continua que posea máximos locales en un conjunto numerable. En efecto,

Ejemplo 1. Consideremos la partición de $[0,1]$ dada por $\left\{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$. En cada uno de estos intervalos definiremos la función f de modo que sea decreciente y lineal en el intervalo $\left(\frac{2n+1}{2n(n+1}, \frac{1}{n}\right)$ y creciente y lineal en $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{2n+1}{2n(n+1}\right)$. Notemos que $x = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$ es el punto medio del intervalo $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por

$$f(x) := \begin{cases} 2(n+1)x - \frac{2n+1}{n} & \text{si } x \in \left[\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n}\right); \\ -2n + \frac{2n+1}{n+1} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{2n+1}{2n(n+1)}\right); \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La función f es continua y en cada punto de la forma $x = 1/n$, con $n \in \mathbb{N}$, posee un máximo local estricto. Es decir

$$\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset M(f).$$

Así, la función f posee máximos locales estrictos en un conjunto numerable.

Recordemos que un conjunto $D \subset \mathbb{R}$ es *denso* en $\mathbb{R}$, si para todo número $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $d_n \in D$ y

$\lim_{n\to\infty} d_n = x$. En virtud del ejemplo anterior cabe la siguiente pregunta:

Existe una función continua, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que el conjunto de máximos locales estrictos sea un conjunto denso en $\mathbb{R}$?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa. La existencia de dichas funciones fue establecida por Zalcwasser [Z] en 1927 y redescuebierta por Posey [P] en 1964. En estos dos trabajos se prueba la existencia de un modo no constructivo.

2. Una función con máximos locales en los números racionales

En esta sección presentamos la construcción de un ejemplo de una función continua, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que posse un máximo local estricto en cada número racional. Recordemos que el conjunto de los números racionales es denso en el conjunto de los números reales. Este ejemplo es debido a Posey y Vaughan [PV] y fue obtenido en 1983. La construcción es similar a las construcciones clásicas de funciones continuas no diferenciables.

Sea $\mathbb{Q} := (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ el conjuntos de los números racionales y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) := 1 - \min\{1, |x|\}.$$

Notemos la función g es continua, tiene un máximo en $x = 0$ y es igual a cero para todo $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. En el intervalo donde g no es nula, su gráfico es un triángulo isóceles. Consideremos ahora la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x),$$

donde

$$g_n(x) := A_n g\left(\frac{x - q_n}{w_n}\right).$$

Los número reales positivos A_n y w_n es especificarán más adelante. Notemos que si $|x - r_n| > w_n$ entonces $g_n(x) = 0$. Además, la función g_n posee un máximo en $x = q_n$. Denotaremos por $I_n := [q_n - w_n, q_n + w_n]$ el intervalo donde la función g_n es positiva y lo llamaremos *intervalo asociado a* g_n. Denotaremos por

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x),$$

a la $n-$ésima suma parcial en la definición de la función f. Asumiremos las siguientes condiciones:

(1) La constante A_n es tal que $0 < A_n < 2^{-n}$.
(2) Los extremos del intervalo I_n no son números racionales.
(3) Si $j < n$ entonces o bien
  (a) tenemos que $q_n \notin I_j$ y la constante w_n se escoge de modo que $I_n \cap I_j = \emptyset$, o bien
  (b) tenemos que $q_n \in I_j$ y la constante w_n se escoge de modo que I_n esté estrictamente contenido en la mitad del intervalo de I_j al que q_n pertence. Por ejemplo, si $q_j - w_j < q_n < q_j$ entonces $q_j - w_j < q_n - w_n < q_n + w_n < q_j$.

Inductivamente escogemos las constantes A_n y w_n de modo que se satisfagan las condiciones $(1),(2)$ y (3). En la segunda parte de la construcción algunas de estas constantes serán modificadas, pero seguirán satisfaciendo las condiciones aquí establecidas.

Lema 2.1. *La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ es continua.*

Proof. En efecto, notemos que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ es normalmente convergente (y en particular uniformemente convergente)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty,$$

Por lo tanto la función f es continua. Este resultado sólo depende de las constantes $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y no de la elección de w_n. □

En lo que sigue constriuremos por inducción la sucesión de funciones f_n. Recordemos que f_n es la suma de funciones g_j que cuando no nulas poseen un gráfico triangular. Sean A_1 y w_1 constantes satisfaciendo $(1),(2)$ y (3) y por lo tanto definiendo f_1. Construiremos la función f_n de modo tal que

i) posee un máximo local estricto en q_n ya que es linal y creciente en $(q_n - w_n, q_n)$ y lineal y decreciente en $(q_n, q_n + w_n)$;
ii) si $I_n \subset I_j$ entonces $j<n$ y $f_n(q_n) < f_j(q_j)$.

Supongamos que la función f_{n-1} se ha definido satisfaciendo las condiciones $i)$ y $ii)$. Si $I_n \cap I_j = \emptyset$ para todo $j \in \{1,2,\dots,n\}$ entonces mantenemos la elección de A_n y w_n obtenida en la primera parte de la construcción. Caso contrario, sea $h \in \{1,2,\dots,n-1\}$ el mayor entero tal que $r_n \in I_h$. En virtud de la condición $(3b)$ tenemos que $I_n \subset (r_h - w_h, r_h)$ o $I_n \subset (r_h, r_h + w_h)$. Por otra parte, como $f_h(r_n - w_n) < f_h(r_h)$ la constante A_n puede escogerse de modo tal que $f_n(r_n) < f_h(r_h)$. Ahora, si $r_h \in I_j$ para $j<h$ entonces $I_h \subset I_j$ y luego por $ii)$ tenemos que $f_h(r_h) < f_j(r_j)$, de donde $f_n(r_n) < f_j(r_j)$ y por lo tanto se satisface $ii)$. Una vez fijado A_n podemos escoger w_n de modo que $i)$ sa satisfaga. Para ello basta notar que como las pendientes máximas y mínimas de g_j son $\pm A_j/w_j$, si

$$\frac{A_n}{w_n} > \sum_{j=1}^{n-1} \frac{A_j}{w_j}$$

entonces se satisface $i)$. De este modo conluye la inducción.

Lema 2.2. *La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ posee un máximo local estricto en cada punto racional.*

Proof. Sea $x \in I_n \setminus \{q_n\}$, probaremos que $f(x) < f(q_n)$. Si para todo $j\in\mathbb{N}$ tal que $j>n$ se tiene que $x \notin I_j$ entonces por $i)$ tenemos que

$$f(x) = f_n(x) < f_n(q_n) \leq f(q_n).$$

Sea $h \in \{n+1, n+2, \dots\}$ el menor índice mayor que n tal que $x \in I_h$. Si existe $k>h$ tal que $x\in I_k$ entonces por $i)$ y $ii)$ tenemos que

$$f(x) = f_k(x) < f_k(q_k) < f_n(q_n) \leq f(q_n).$$

Si no existe tal $k \in \mathbb{N}$ entonces

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x),$$

donde $x \in I_{k_i}$, con $i \in \mathbb{N}$ y $k_i > h$. Por lo tanto

$$f_{k_i}(x) < f_{k-i}(q_{k_i}) < f_h(q_h) < f_n(q_n),$$

y por lo tanto

$$f(x) \leq f_h(q_h) < f_n(q_n) \leq f(q_n).$$

De donde se obtiene el resultado. □

Conlcuimos esta sección con dos problemas.

Problema 1. Construya, sin utilizar series de funciones, una función que posea máximos locales estrictos en todos los números racionales. Es posible que para resolver este problema sea útil recordar el trabajo de Lui Wen [W] quien en 2000 contruyó, sin utilizar series de funciones, una función continua que no es diferenciable en ningún punto.

Problema 2. Sea $\mathcal{A} \subset [0,1]$ un sub-conjunto numerable. Determine si existe una función diferenciable $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $M(f) = \mathcal{A}$.

3. La mayoría de las funciones posee máximos locales densos.

Denotaremos por $C[0,1]$ el conjunto de funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Dotado con la siguiente métrica

$$d(f,g) := \sup \{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\},$$

el espacio de las funciones continuas definidas en el intervalo $[0,1]$ es un espacio métrico completo. Sea

$$D := \{f \in C[0,1] : M(f) \text{ es un conjunto denso en } [0,1]\}.$$

Esta sección esta dedicada a probar que el conjunto D es, en un sentido preciso, *grande*. Para determinar el tamano de un sub-conjunto del espacio de las funciones continuas utilizaremos las siguientes nociones clásicas de la teoría de Baire. Un sub-conjunto $A \subset C[0,1]$ es *nunca denso* si el interior de su clausura es vacío, es decir, si todo conjunto abierto $O \subset C[0,1]$ contiene un sub-conjunto abierto $O' \subset O$ tal que $O' \subset C[0,1] \setminus A$. Dicho de otro modo, el conjunto A no es denso en ningún sub-conjunto abierto de $C[0,1]$. Diremos que un conjunto es de *primera categoría* si puede escribirse como la unión numerable de conjuntos nunca densos. Un sub-conjunto de $C[0,1]$ es *residual* si su complemento es un conjunto de primera categoría. Si $A \subset C[0,1]$ es un conjunto residual entonces existe un conjunto O abierto y denso en $C[0,1]$ tal que $O \subset A$. Desde la perspectiva de la topología los conjuntos residuales son *grandes* [1]. De otro modo, si $A \subset C[0,1]$ es un conjunto residual, una función continua *típica* pertence a A.

Vladimir Drobot y Michael Morayne [DM] probaron en 1985 que la mayoría de las funciones continuas en el intervalo unitario poseen un conjunto de máximos locales denso en $[0,1]$.

Teorema 3.1 (Dorbot y Morayne)**.** *El conjunto D es un subconjunto residual de $C[0,1]$.*

[1]Existen distintos puntos de vista para determinar si un conjunto es grande. Por ejemplo, en vez de considerar la prespectiva topológica podemos utilizar nociones de teoría de la medida. Es posible que desde un punto de vista un conjunto sea grande mientra que de otro no lo sea (ver el texto de Oxtoby [O] donde se tratan numerosos ejemplos de este tipo de situaciones.)

Proof. En primer lugar fijaremos notación. La letra I denotará siempre un subintervalo cerrado de $[0,1]$, denotaremos por $\text{int}I$ el interior de I y por $|I|$ el largo del intervalo. Dado $I \subset [0,1]$ definimos el siguiente conjunto

$$A(I) := \{f \in C[0,1] : \text{existe } x \in \text{int}I \text{ tal que } f(x) > f(y) \text{ para todo } y \in I \setminus \{x\}\}.$$

Este es el conjunto de funciones continuas que restringidas al intervalo I poseen un único máximo y éste pertence al interior del intervalo.

Lema 3.1. *Si $I \subset [0,1]$ es un intervalo cerrado, entonces el conjunto $A(I)$ es denso en $C[0,1]$.*

Proof. Sean $f \in C[0,1]$ y $\epsilon > 0$. Denotemos por $z := \sup\{f(y) : y \in I\}$. Sea $J \subset I$ un intervalo abierto no vacío tal que para todo $x \in J$ se tiene que $f(x) > z - \epsilon$. Definamos ahora una nueva función $g \in C[0,1]$ del siguiente modo: en el punto medio de J la función g toma el valor $z+\epsilon$; en los dos extremos de J la función g coincide con la función f; en J el gráfico de g consta de dos lineas rectas que unen los tres puntos descritos anteriormente; en $I \setminus J$ la función g coincide con f. Notemos que

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in J\} = 2\epsilon.$$

Por otra parte la función g es tal que posee un único máximo y este corresponde al punto medio del intervalo $J \subset I$. Por lo tanto $g \in A(I)$. Así, dada cualquier función continua f existe una función $g \in A(I)$ a distancia menor que 2ϵ de la función f. Como ϵ es un número arbitarrio tenemos que el conjunto $A(I)$ es denso en $C[0,1]$. □

Lema 3.2. *Si $I \subset [0,1]$ es un intervalo cerrado, entonces el conjunto $A(I)$ es la intersección numerable de conjuntos abiertos.*

Proof. Para cada intervalo $J \subset \text{int}I$ consideremos el siguiente conjunto

$$B(I,J) := \{f \in C[0,1] : \sup\{f(x) : x \in J\} > \sup\{f(x) : x \in I \setminus \text{int}J\}\}.$$

Notemos que el conjunto $B(I,J)$ es abierto. En efecto, si $f \in B(I,J)$ entonces la bola abierta de centro f y radio

$$\frac{1}{3}\left(\sup\{f(x) : x \in J\} - \sup\{f(x) : x \in I \setminus \text{int}J\}\right)$$

está contenida en $B(I,J)$. Probaremos ahora que para cada intervalo cerrado $I \subset [0,1]$ tenemos que

$$A(I) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left\{ \cup B(I,J) : J \text{ intervalo cerrado }, J \subset \text{int}I, |J| < \frac{1}{i} \right\}. \tag{1}$$

Sea $f \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \left\{ \cup B(I,J) : J \text{ intervalo cerrado }, J \subset \text{int}I, |J| < \frac{1}{i} \right\}$. Es decir, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un intervalo cerrado $J_i \subset \text{int}I$ tal que $f \in B(I,J_i)$ y $|J_i| < 1/i$. El conjunto $\cap_{i=1}^{\infty} J_i$ contiene todos los puntos donde f alcanza su máximo en el intervalo I. En efecto, si $f \in B(I,J_i)$ entonces el máximo de f se alcanza en J_i y no en $I \setminus J_i$. Como

$$\lim_{i \to \infty} |I_i| = 0,$$

tenemos que $\cap_{i=1}^{\infty} J_i = \{x\}$, es decir, consiste de un solo punto. Como para todo $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $J_i \in \text{int}I$ podemos concluir que $x \in \text{int}I$ y que f alcanza su máximo en el punto x y que si $y \in I \setminus \{x\}$ entocnes $f(x) > f(y)$. Luego $f \in A(I)$. La inclusión opuesta es clara ya que si $f \in A(I)$ basta considerar una sucesión de intervalos $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que el único máximo de f, que denotaremos por x, es tal que $\{x\} = \cap_{i=1}^{\infty} J_i$. Por lo tanto la igualdad en la ecuación (1) es válida. $\square$

En virtud de los Lemas 3.1 y 3.2 tenemos que el conjuto $A(I)$ es denso y es la intersección numerable de conjuntos abiertos, es decir es un conjunto residual. El siguiente conjunto es, por lo tanto, residual

$$X = \bigcap \{A(I) : I \subset [0,1], \text{ los extremos de } I \text{ son números racionales}\}$$

Como $X \subset D$ tenemos que el conjunto D es residual. $\square$

Dada una función $f \in C[0,1]$ definimos

$$m(f) := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es un mínimo local estricto para } f\}.$$

Un argumento similar al de Schoenflies (Teorema 1.1) nos permite probar que este conjunto es a lo más numerable. Consideremos ahora el conjunto

$$E := \{f \in C[0,1] : m(f) \text{ es un conjunto denso en } [0,1]\}.$$

La demostración que acabamos de presentar permite probar que el conjunto E es residual y por lo tanto el conjunto $D \cap E$ también los es. Concluimos esta nota con otro problema,

Problema 3. Escoja dos sub-conjuntos $\mathcal{A}, \mathcal{H} \subset [0,1]$ de modo que ambos sean densos en $[0,1]$ y tales que $\mathcal{A} \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Construya una función $f : [0,1] \to [0,1]$ tal que $M(f) = \mathcal{A}$ y $m(f) = \mathcal{H}$.

References

[DM] V. Drobot and M. Morayne *Continuous Functions with a Dense Set of Proper Local Maxima.* The American Mathematical Monthly, Vol. 92, No. 3 (1985), pp. 209-211.

[O] J.C. Oxtoby, *Measure and category. A survey of the analogies between topological and measure spaces.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 2. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. x+106 pp.

[P] E.E. Posey, *Proteus forms of wild and tame arcs.* Duke Math. J. 31 (1964) 63–72.

[PV] E. E. Posey and J. E. Vaughan *Functions with a Proper Local Maximum in Each Interval* The American Mathematical Monthly, Vol. 90, No. 4 (1983), pp. 281-282.

[Sc] A. Schoenflies, *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigun (1900).

[W] L. Wen *A Nowhere Differentiable Continuous Function.* The American Mathematical Monthly, Vol. 107, No. 5 (2000), pp. 450–453

[Z] Z. Zalcwasser, *Sur les fonctions de Kopcke* Prace Mat. Fiz., 35 (1927-28) 57-99.

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC), Avenida Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile

E-mail address: giommi@mat.puc.cl

URL: http://www.mat.puc.cl/~giommi/