Teorema del límite central para variables aleatoreas aditivas

Alejandro Ramirez
Julio de 1997

0. Indice.

1. Motivación.

Recordemos el siguiente teorema básico:

Teorema 1. (TLC para martingalas) Sea $(M_1, \mathcal{F}_1)$ una martingala estacionaria y ergódica con distribución inicial μ y tomando valores en un espacio de estado X. Supongamos que $E_\mu(M_1^2) = \sigma^2 < \infty$. Luego

$$\sqrt{\epsilon} M_{t/\epsilon}$$

converge débilmente en $D([0,\infty); X)$ a la distribución de un movimiento Browniano con varianza σ^2.

Queremos ver como se aplica este teorema a variables aleatoreas aditivas para demostrar el teorema del límite central funcional. En estas notas nos concentraremos en el problema de demostrar el teorema del límite central y luego indicaremos como se demuestra la tension. Consideramos un proceso estocástico X_t definido por un generador infinitesimal L. Sea $g(x)$ alguna función definida en el espacio de estado X del proceso y tal que

$$g(x) = Lf(x) \tag{1.1}$$

donde $f(x) \in \mathcal{D}(L)$. Entonces,

$$M_t = f(x_t) - f(x_0) - \int_0^t Lf(x_s) ds$$

es una martingala. Si la distribución inicial es ergódica y la esperanza de la variación cuadrática de M_t es finita, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t g(x_s) ds$$

converge en distribución a una variable normal.

Consideremos dos casos en los que la solución de la ecuación 1.1 existe.

Caso 1. L es un operador autoadjunto en $L^2(X, \mu)$ respecto a una medida ergódica μ y con gap espectral $\lambda_0 > 0$. Para que la ecuación 1.1 tenga solución necesitamos al menos que

$$\int g d\mu = 0$$

Ahora, por la ergocidad de μ sabemos que 0 es un autovalor simple de L. Luego, del hecho de que $\lambda_0 > 0$, tenemos si $g \in L^2(X, \mu)$ que

$$f(x) = \left(\int_{-\lambda_0}^{-\infty} \frac{1}{\lambda} dE_\lambda \right) g$$

donde E_λ es la resolución de la identidad de L.

Caso 2. El espacio de estado X es finito. Nuevamente necesitamos como mínimo que

$$\sum_{x \in X} g(x)\mu(x) = \int g d\mu = 0.$$

Es decir g es ortogonal a μ. Pero si L^* es la matriz adjunta de L respecto a la medida uniforme, claramente

$$L^*\mu = 0$$

Pero como $X = \text{Null } L^* \oplus \text{ Rang } L$, es claro que $g \in \text{Rang } L$.

En lo que sigue estaremos básicamente interesados en comprender que pasa en el caso en que L es autoadjunto pero no tiene gap espectral.

2. Condiciones necesarias y suficientes para TLC para variables aditivas.

Ahora precisaremos más el contexto de la discusión anterior. Consideremos un espacio polaco X. Sea $C(X)$ el espacio de funciones continuas y acotadas en X con la norma del supremo $||\cdot||_\infty$. Consideraremos procesos estocásticos que viven en el espacio de Skorohod $D([0,\infty); X)$.

Definición. Sea L un operador lineal en $C(X)$ con dominio $\mathcal{D}(X)$. Decimos que L es un generador infinitesimal de Markov si,

i) $1 \in \mathcal{D}(L)$ y $L1 = 0$.
ii) $\mathcal{D}(L)$ es denso en $C(X)$.
iii) $\forall \lambda > 0$ tenemos que el operador $(I - \lambda L)$ es invertible y el operador inverso tiene la cota $||(I - \lambda L)^{-1}|| \leq 1$.

Definición. Una familia de operadores $(S_t)_{t>0}$ lineales en $C(X)$ con $\mathcal{D}(S_t) = C(X)$ $\forall t > 0$ se llama un semigrupo de Markov si

i) $S_t 1 = 1$
ii) $S_0 = I$
iii) $\lim_{x\to 0} S_t f = f \quad \forall f \in C(X)$
iv) $S_t S_s = S_{t+S} \quad \forall t, s > 0$
v) $\|S_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad \forall f \in C(X)$.

Por el teorema de Hille-Yosida sabemos que a cada semigrupo de Markov corresponde un único generador infinitesimal de Markov y viceversa. Además se puede demostrar que a cada semigrupo de Markov corresponde un único proceso de Markov $\{P_\eta, \eta \in X\}$ y viceversa.

Para el análisis que sigue, nos interesa situarnos en el espacio $H = L_2(X, \mu)$, donde μ es una medida de probabilidad ergódica asociada a un generador infinitesimal L [3]. Por continuidad, el semigrupo S_t asociado a L se extiende a H. Su generador es la clausura L_μ de L en H. Supondremos que L_μ es autoadjunto en H.

Definimos la siguiente relación de equivalencia en H:

$$f = g \text{ ssi } L_\mu f = Lg$$

De la ergocidad de μ, notemos que $f = g$ ssi $f - g = \text{const}$. Llamamos H_0 al espacio de clases de equivalencia de H, con el mismo producto interno. Podemos hacer la siguiente identificación

$$H_0 = \{f \in H : (f, 1) = 0\}.$$

Ahora consideremos al operador $S = \sqrt{-L_\mu}$ con dominio $\mathcal{D}(S)$. Definimos H_1 como la compleción de $\mathcal{D}(S) \cap H_0$ respecto al producto interno $(f, g)_1 = (Sf, Sg)$. Que esto es un producto interno en H_0 se sigue de la autoadjunticidad de L_μ. Notemos que no es cierto que $H_1 \subseteq H_0$. En efecto, se puede encontrar contraejemplos en casos en que L_μ no tiene gap espectral. A continuación introducimos la siguiente norma dual en H_0:

$$\|\psi\|_{-1}^2 = \sup_{\varphi \in H_1} \{(\varphi, \psi) - (S\varphi, S\psi)\}$$

Para ver que esto es una norma supongamos que $\|\psi\|_{-1} = 0$. Luego

$$(\psi, \varphi) \leq \lambda \|\varphi\|_1^2 \qquad \forall \varphi \in H_1.$$

Tomando el límite $\lambda \to 0$ y usando el hecho que H_1 es denso en H_0 concluimos que $\psi = 0$.

A continuación definimos el subespacio H_{-1} como la compleción respecto a la norma $||\cdot||_{-1}$ del conjunto

$$\{\varphi \in H_0 : \|\varphi\|_{-1} < \infty\}$$

Teorema 2. Las siguientes condiciones son equivalentes para $\psi \in H_0$.

(i) $\psi \in H_{-1}$
(ii) $|(\psi, \varphi)| \leq c\|\varphi\|_1 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(S)$ y para alguna constante $c > 0$.
(iii) $\psi \in RangS$
(iv) $\sigma^2(\psi) \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E_\mu([\int\limits_0^t \psi(X_s)ds)]^2) < \infty$
(v) $\int\limits_0^\infty E_\mu(\psi(X_s)\psi(X_0))ds < \infty$.

Aquí S_t es el semigrupo de Markov definido por L , X_s denota el proceso de Markov asociado a S_t y E_μ es la esperanza respecto a este proceso con distribución inicial μ.

Prueba (i)⇒(ii). Como $\psi \in H_{-1}$ tenemos

$$\|\psi\|_{-1}^2 = \sup_{\varphi\in H_1} \{(\varphi, \psi) - (S\varphi, S\varphi)\} < \infty.$$

En particular si elegimos $\varphi = \lambda f$ con $\lambda > 0$ y $f \in H_1$, tenemos,

$$(f, \psi) \leq \frac{\|\psi\|_{-1}^2}{\lambda} + \lambda\|f\|_1^2.$$

Luego, para $\lambda = \frac{\|\psi\|_{-1}}{\|f\|_1}$, obtenemos (ii).

(ii)⇒(i). Notemos que

$$\sup_{\varphi\in H_1} \{(\psi, \varphi) - (S\varphi, S\varphi)\} \leq \sup_{\varphi\in H_1} \{c\|\varphi\|_1 - \|\varphi\|_1^2\} \leq c^2$$

(ii)⇒(iii). Para $\beta > 0$ sea

$$h_\beta = (\beta - L_\mu)^{-1/2}\psi$$

Luego si $\varphi \in \mathcal{D}(S)$.

$$\begin{aligned}
|(\varphi, h_\beta)|^2 &= |(\varphi, (\beta - L_\mu)^{-1/2}\psi)|^2 = |((\beta - L_\mu)^{-1/2}\varphi, \psi)|^2 \\
&\leq c((\beta - L_\mu)^{-1/2}S\varphi, (\beta - L_\mu)^{-1/2}S\varphi) \\
&\leq c\|\varphi\|_0^2 - c\beta(\varphi, (\beta - L_\mu)^{-2}\varphi) \\
&\leq c\|\varphi\|_0^2
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{D}(S)$ es denso en H_0, tenemos que

$$\|h_\beta\|_0^2 \leq c^2$$

y luego existe una subsucesión β_n de β, tal que h_{β_n} converge débilmente en H_0 a algún límite $h \in H_0$. Ahora como $(\beta - L_\mu)^{1/2}h_\beta = \psi$, tenemos para $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ que,

$$(h_{\beta_n}, (\beta_n - L_\mu)^{1/2}\varphi) = (\psi, \varphi)$$

Pero $(h_{\beta_n}, (\beta_n - L_\mu)^{1/2}\varphi) = (h_{\beta_n}, S\varphi) + (h_{\beta_n}, (\beta_n - L_\mu)^{1/2}\varphi - S\varphi)$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz el segundo término converge a 0. Luego

$$(h, S\varphi) = (\psi, \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(S)$$

Esto implica que $h \in \mathcal{D}(S^*) = \mathcal{D}(S)$, y que $Sh = \psi \Rightarrow h \in RangS$.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Como $\psi \in RangS$, existe $h \in \mathcal{D}(S) \subseteq H_0$ tal que $Sh = \psi$ y $\|h\|_0 \leq c$. Luego

$$|(\psi, \varphi)| = |(Sh, \varphi)| = |(h, S\varphi)| \leq \|h\|_0 \|\varphi\|_1 \leq c\|\varphi\|_1$$

(iii)$\Rightarrow$(iv) y (v). Sea $\psi \in RangS$. Luego existe $h \in \mathcal{D}(S)$ tal que

$$\psi = Sh$$

Notemos que si $\psi \in Rang(L_\mu)$.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E_\mu([\int_0^t \psi(X_s)ds]^2) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^t E_\mu(\psi(X_s)\psi(X_u))dsdu$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^t E_\mu(\psi(X_{s-u})\psi(X_0))dsdu \\
&= 2 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^s E_\mu(\psi(X_u)\psi(X_0))dsdu \\
&= 2 \int_0^\infty E_\mu(\psi(X_s)\psi(X_0))ds \\
&= 2((-L_\mu)^{-1}\psi, \psi)
\end{aligned}$$

Por un argumento de densidad concluimos que si $\psi \in RangS$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E_\mu([\int_0^t \psi(X_s)ds]^2) = 2\|h\|_1^2 < \infty$$

Notemos que (v) es una consecuencia de la penúltima desigualdad.

(iv)$\Rightarrow$(v) y (iii). Ver el cálculo anterior.

Nota 1. Notemos que las siguientes inclusiones son FALSAS: $H_{-1} \subseteq H_1, H_0 \subseteq H_1, H_1 \subseteq H_0$ y $H_{-1} \subseteq H_0$. Es decir,

(a) $H_{-1} \not\subseteq H_1$
(b) $H_0 \not\subseteq H_1$
(c) $H_1 \not\subseteq H_0$
(d) $H_{-1} \not\subseteq H_0$
Para ver esto, tomamos el caso en que H_0 son las funciones de $L_2(\mathbf{R}, dx)$ modulo constantes y dx es la medida de Lebesgue. Tomemos $S = d/dx$. A continuación definimos distintas funciones que prueban (a), (b), (c):
(a) $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$.
(b) $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$
(c) Basta tomar la función definida por $f(x) = 1 - e^{-x}$ si $x \geq 0$ y $f(x) = e^x - 1$ si $x < 0$.
(d) Basta tomar la funcion definida por $f(x) = e^{-x}/\sqrt{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

3. Teorema de Kipnis-Varadhan [1].

Teorema 3. (Kipnis-Varadhan 1986) Sea L_μ un generador infinitesimal de Markov en $H = L_2(x, \mu)$, autoadjunto y tal que μ es una medida ergódica respecto al semigrupo correspondiente. Sean H_{-1} y H_1 los espacios asociados. Sea $g \in H_{-1}$ y sea $u_\lambda, \lambda > 0$ la solución de la ecuación $(\lambda - L_\mu)u_\lambda = g$. Entonces,
i) $\lim_{\lambda \to 0} \lambda \|u_\lambda\|_0^2 = 0$.
ii) Existe $u_0 \in H_0$ tal que $\lim_{\lambda \to 0} \|u_\lambda - u_0\|_1 = 0$.
iii) $\sup_{\lambda \geq 0} \|u_\lambda\|_1 < \infty$.

Prueba Notemos que
$$\lambda \|u_\lambda\|_0^2 + \|u_\lambda\|_1^2 = (g, u_\lambda) \tag{5.1}$$
$$\lambda(u_\lambda, u_\nu) - (L_\mu u_\lambda, u_\nu) = (g, u_\nu) \tag{5.2}$$
De 5.1 se sigue que
$$\lambda \|u_\lambda\|_0^2 \leq \|g\|_1^2 \tag{6.1}$$
$$\|u_\lambda\|_1^2 \leq \|g\|_{-1} \tag{6.2}$$
Ahora, de 6.2 vemos que existe una subsucesión u_{λ_n} de u_λ y un elemento $u_0 \in H_1$ tal que u_{λ_n} converge debilmente a u_0 en H_1,
$$u_{\lambda_n} \xrightarrow{H_1} u_0$$
Luego, de 5.2 tenemos
$$\limsup_{\lambda_n \to 0} \lambda_n (u_{\lambda_n}, u_\nu) + (u_0, u_\nu)_1 = (g, u_\nu)$$
Pero de la cota 6.1 vemos que el límite en esta ecuación es 0. Luego
$$\|u_0\|_1^2 = \lim_{\lambda_n \to 0} (g, u_{\lambda_n})$$

Además, tomando el límite $\lambda_n \to 0$ en 5.1 vemos que

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \lambda_n \|u_{\lambda_n}\|_0^2 + \lim_{\lambda_n \to 0} \|u_{\lambda_n}\|_1^2 = \|u_0\|_1^2 \tag{6.3}$$

De la semicontinuidad de $\|u_\lambda\|_1$ sigue que

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \lambda_n \|u_{\lambda_n}\|_0^2 = 0 \tag{6.4}$$

Notemos que esto implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_{\lambda_n}\|_1 = \|u_0\|_1$. Luego u_{λ_n} converge fuertemente en H_1 a u_0. Para demostrar la unicidad de u_0, notemos que $\lambda u_\lambda - \nu u_\nu - L_\mu(u_\lambda - u_\nu) = 0$. Multiplicando esta ecuación por $u_\lambda - u_\nu$ y usando 6.4, concluimos que u_λ es una sucesión de Cauchy a H_1.

Ahora, como corolario del teorema de Kipnis-Varadhan tenemos el siguiente teorema [1].

Teorema 4. Sea X_t el proceso estocástico asociado a un generador infinitesimal de Markov L_μ en $H = L_2(x, \mu)$ autoadjunto y ergódico respecto a μ. Si $g \in H_{-1}$ entonces

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t g(X_s) ds$$

converge en distribución a $N(0, \sigma^2)$ donde $\sigma^2 = \|u_0\|_1^2$.

Prueba Consideremos las soluciones $u_\lambda \in L^2(x, \mu)$ de las ecuaciones

$$(\lambda - L_\mu) u_\lambda = g.$$

Luego,

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t g(X_s) ds = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \lambda u_\lambda(X_s) ds - \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t L_\mu u_\lambda(X_s) ds$$

Pero

$$M_t^\lambda = u_\lambda(X_t) - u_\lambda(X_0) - \int_0^t L_\mu u_\lambda(X_s) ds$$

son martingalas. Se sigue que

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t g(X_s) ds = \frac{1}{\sqrt{t}} M_t^\lambda + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \lambda u_\lambda(X_s) ds - \frac{1}{\sqrt{t}} (u_\lambda(X_t) - u_\lambda(X_0))$$

Notemos que

$$(M_t^\lambda - M_t^\nu)^2 - \int_0^t L_\mu(u_\lambda(X_s) - u_\nu(X_s))^2 ds$$
$$+ 2\int_0^t (u_\lambda(X_s) - u_\nu(X_s)) L_\mu(u_\lambda(X_s) - u_\nu(X_s)) ds$$

es una martingala. De aquí se sigue que

$$E_\mu(M_t^\lambda - M_t^\nu)^2 = 2t\|u_\lambda - u_\nu\|_1^2$$

Luego M^λ son martingalas que convergen a una martingala M^0 y tal que

$$E_\mu(M_t^\lambda - M_t^0)^2 = 2t\|u_\lambda - u_0\|_1^2$$

Eligiendo $\lambda = 1/t$, de la segunda parte del teorema 3, se sigue que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E_\mu(M_t^{1/t} - M_t^0)^2 = 0$$

Esto significa que en

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t g(X_s)ds = \frac{1}{\sqrt{t}} M_t^0 + \frac{1}{\sqrt{t}}(M_t^\lambda - M_t^0) + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \lambda u_\lambda(X_s)ds - \frac{1}{sqrtt}(u_\lambda(X_t) - u_\lambda(X_0))$$

basta demostrar que los dos últimos términos convergen a 0 en probabilidad. Pero

$$E_\mu([\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \lambda u_\lambda(X_s)ds]^2) \leq \frac{\lambda^2}{t} E_\mu(t \int_0^t u_\lambda^2(X_s)ds)$$

$$= \lambda^2 t\|u_\lambda\|_0^2 = \lambda\|u_\lambda\|_0^2 \overset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0$$

y

$$E_\mu(\frac{1}{t}(u_\lambda(X_t) - u_\lambda(X_0))^2) \leq \frac{4}{t}\|u_\lambda\|_0^2$$

Nota 2. Se puede demostrar que la convergencia en el teorema 4 es en realidad un principio de invarianza. Esto es también un corolario del teorema de Kipnis-Varadhan el cual implica la tensión.

4. Aplicación al modelo de exclusión simple simétrico.

a) Exclusión simple [2].

El proceso de exclusión simple es un proceso estocástico con espacio de estado

$$X = (0,1)^{\mathbf{Z}^d}$$

y un generador infinitesimal definido para funciones locales f:

$$Lf(n) = \sum_{x,y \in \mathbf{Z}^t} p(x,y)\eta(x)(1-\eta(y))(f(\eta^{xy}) - f(\eta))$$

donde $\eta \in X$, $\eta(x) \in \{0,1\}$ es la coordenanda x de η, η^{xy} representa la configuración en la que la particula en x ha saltado al sitio y, i.e.,

$$\eta^{xy}(z) = \begin{cases} \eta(z) & \text{si } z \neq x, y \\ \eta(x) & \text{si } z = y \\ \eta(y) & \text{si } z = x \end{cases}$$

y $p(x,y)$ son las probabilidades de transición de una cadena de Markov en $\mathbf{Z}^1$:

$$p(x,y) \geq 0$$
$$\sum_g p(x,y) = 1$$

Si suponemos que

$$\sup_y \sum_x p(x,y) < \infty$$

entonces la clausura de L en $C(X)$ (al espacio de las funciones continuas en X) define un semigrupo de Feller S_t. En lo que sigue supondremos tanto que

$$p(x,y) = p(0, y-x)$$

como que las medidas de Bernoulli μ_ρ en X son ergódicas para L:

$$\mu_\rho(\eta : \eta(x) = 1) = \rho \qquad 0 \leq \rho \leq 1.$$

(b) Exclusión simple con partícula marcada.

Ahora supongamos que en el proceso de exclusión simple marcamos una partículas con la intención de seguirle la pista a su trayectoria. Más formalmente esto se puede describir como un proceso cuyo espacio de estado es

$$X = \{(z,\eta) \in \mathbf{Z}^d \times \{0,1\}^{\mathbf{Z}^d}; \eta(z) = 1\}$$

y con generador definido para funciones locales f por:

$$\begin{aligned} Lf(z,\eta) = & \sum_{x,y\subset \mathbf{Z}^d/\{z\}} p(x,y)\eta(x)(1-\eta(y))(f(z,\eta^{xy})-f(z,\eta)) \\ & + \sum_{y\in \mathbf{Z}^d/\{0\}} p(z,y)(1-\eta(y))(f(y,\eta^{zy})-f(z,\eta)) \end{aligned}$$

Ahora si definimos el orígen como la posición de la partícula marcada, tenemos un proceso cuyo espacio de estado es

$$X = \mathbf{Z}^d \times \{0,1\}^{\mathbf{Z}^d/\{0\}}$$

y con generador

$$\begin{aligned} Lf(z,\eta) = & \sum_{x,y\subset \mathbf{Z}^d/\{0\}} p(x,y)\eta(x)(1-\eta(y))(f(z,\eta^{xy})-f(z,\eta)) \\ & + \sum_{y\in \mathbf{Z}^d/\{0\}} p(0,y)(1-\eta(y))(f(z+y,\tau_y\eta)-f(z,\eta)) \end{aligned} \tag{9.1}$$

donde

$$\tau_y\eta(x) = \eta^{0,y}(y+x)$$

Notemos que η es un proceso de Markov por si solo en $\{0,1\}^{\mathbf{Z}^d/0}$. Llamaremos a su generador L_{env}. Bajo la hipótesis que las medidas producto Bernoulli son ergódicas para el proceso de exclusión correspondiente, se puede demostrar que también lo son para el proceso ambiental L_{env}.

Ahora supongamos que el proceso de exclusión con partícula marcada, definido por 9.1, tiene por distribución inicial la medida

$$\delta_0 \times \mu_\rho$$

donde δ_0 tiene como soporte en $\mathbf{Z}^d$, el origen. Notemos que

$$M_t = X_t - \sum_{y\in\mathbf{Z}^d} \int_0^t p(0,y)(1-\eta_s(y))y\,ds \tag{9.2}$$

$$N_t = M_t^2 - \sum_{y\in\mathbf{Z}^d} \int_0^t p(0,y)(1-\eta_s(y))y^2\,ds$$

son martingalas, siempre que

$$\sum_{y\in\mathbf{Z}^d} p(0,y)y^2 \quad < \infty$$

Luego

$$E_{\mu_\rho}(M_t^2) = (1-\rho)t \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} p(0,y)y^2$$

y se sigue que

$$\lim_{t\to\infty} E_{\mu_\rho}((\frac{M_t}{t})^2) = 0$$

Esto implica que $\lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{t} = 0$ en probabilidad. Por lo tanto, de 9.1 y el teorema ergódico concluimos la ley débil de los números grandes

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = 0 \quad \text{en probabilidad}$$

Es natural preguntarse si la posición X_t de la partícula marcada también satisface un teorema del límite central. En efecto, como corolario del teorema 4, Kipnis-Varadhan demostraron en [1] que,

Teorema 5. Sea X_t la posición de una partícula marcada en un proceso de exclusión simple con distribución inicial $\delta_0 \times \mu_\rho$, y con probabilidades de transición $p(x,y) = p(0,y-x) = p(y,x)$ satisfaciendo

$$C \equiv \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} p(0,y)y^2 < \infty$$

Entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \overset{D}{=} N(0,\sigma^2)$$

donde $\sigma^2 \geq 0$.

Prueba La primera observación es que de la simetría $p(x,y) = p(y,x)$, se sigue que el generador infinitesimal L_{env} es autoadjunto respecto a las medidas producto Bernoulli μ_ρ. Luego, del hecho que

$$X_t = M_t + \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} \int_0^t yp(0,y)(1-\eta_s(y))ds$$

se sigue que basta demostrar que la función

$$g(n) = \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} y(p(0,y)(1-\eta(y))$$

pertenece a H_{-1} (respecto a L_{env}), y luego aplicar el teorema de Kipnis-Varadhan. Pero en efecto, si $\ell \in \mathbf{Z}^d$ y llamamos $\cdot$ al producto punto usual entre dos vectores de $\mathbf{Z}^d$,

$$\int g(n) \cdot \ell f(n) d\mu_\rho = \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} \int y \cdot \ell p(0,y)(1-\eta(y)) f(\eta) d\mu_\rho$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} \int y \cdot \ell p(0,y)((1-\eta(y)) - (1-\eta(-y)) f(\eta) d\mu_\rho$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} \int y \cdot \ell p(0,y)((1-\eta(y)) - (1-(\tau_{-y}\eta)_y)) f(\eta) d\mu_\rho$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} y \cdot \ell p(0,y) \int (1-\eta(y))(f(\eta) - f(\tau_y \eta) d\mu_\rho$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{y \in \mathbf{Z}^d} (y \cdot \ell)^2 p(0,y) \right)^{1/2} \left(\sum_{y \in \mathbf{Z}^d/0} \int p(0,y)(1-\eta(y))(f(\eta) - f(\tau_y \eta))^2 d\mu_\rho \right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{|l|^2 C}{2} E_{\mu_\rho}(f L_{env} f)$$

Nota 3. Con la excepción del caso en que $d = 1$, y las tasas $p(x,y)$ corresponden a saltos sólo a los primeros vecinos, se puede demostrar que $\sigma > 0$ [1]. El caso mencionado es especial, y alli fue demostrado usando una técnica de acoplamiento por Arratia [5] que $X_t/t^{1/4}$ converge casi seguramente a 0, y que $X_t/\sqrt{t}$ converge a una distribución normal de varianza positiva.

5. Extensiones del teorema de Kipnis-Varadhan.

Teorema 6. (Varadhan 1995 [4]) Sea L_μ un generador infinitesimal de Markov en $H = L_2(x, \mu)$, y tal que μ es una medida ergódica respecto al semigrupo correspondiente. Sean H_{-1} y H_1 los espacios asociados al operador autoadjunto $(L_\mu + L_\mu^*)/2$. Sea $g \in H_{-1}$ y sea $u_\lambda, \lambda > 0$ la solución de la ecuación $(\lambda - L_\mu) u_\lambda = 0$. Supongamos que L_μ satisface la desiguladad

$$(\phi, L_\mu \psi) \leq C ||\phi||_1 ||\psi||_1 \qquad \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(L_\mu) \tag{10.0}$$

para alguna constante C. Entonces,

i) $\lim_{\lambda \to 0} \lambda \|u_\lambda\|_0^2 = 0$

ii) Existe $u_0 \in H_1$ tal que $\lim_{\lambda \to 0} \|u_\lambda - u_0\|_1 = 0$.

Prueba. Notemos que

$$\lambda \|u_\lambda\|_0^2 + \|u_\lambda\|_1^2 = (g, u_\lambda) \tag{10.1}$$

$$\lambda(u_\lambda, u_\nu) - (L_\mu u_\lambda, u_\nu) = (g, u_\nu) \tag{10.2}$$

De 10.1 se sigue que

$$\lambda\|u_\lambda\|_0^2 \leq \|g\|_{-1}^2 \tag{10.3}$$

$$\lambda\|u_\lambda\|_1 \leq \|g\|_{-1} \tag{10.4}$$

De 10.4 vemos que existe $u_0 \in H_1$ y una subsucesión $\lambda_n \to 0$ tal que u_{λ_n} converge débilmente a u_0 en H_1. Ahora, de la hipótesis 10.0 se sigue que L_μ puede extenderse como un operador acotado de H_1 a H_{-1} tal que,

$$\|L_\mu \psi\|_{-1} \leq C\|\psi\|_1 \qquad \forall \psi \in H_1$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|\lambda u_\lambda\|_{-1} &\leq \|g\|_{-1} + \|L_\mu u_\lambda\|_{-1} \\ &\leq (1 + C)\|g\|_{-1} \end{aligned}$$

De aquí se sigue que existe una subsucesión $\lambda_m \to 0$ tal que $\lambda_m u_{\lambda_m}$ converge debilmente en H_{-1} a algún elemnto $w \in H_{-1}$. Ahora sea $f \in H_1 \cap H_0$. Luego

$$|(\lambda_m u_{\lambda_m}, f)| \leq \|\lambda_m u_{\lambda_m}\|_0 \|f\|_0 \to 0$$

Es decir

$$(w, f) = 0 \qquad \forall f \in H_1 \cap H_0$$

Como $H_1 \cap H_0$ es denso en H_0, se sigue que $w = 0$. Luego

$$\lambda_m u_{\lambda_m} \xrightarrow{H_{-1}} 0$$

Es fácil ver que es posible construir dos sucesiones

$$\begin{gathered} v_{\lambda_n} \\ w_{\lambda_n} \end{gathered}$$

que son combinaciones lineales convexas de $\lambda_n u_{\lambda_n}$ y de u_{λ_m} respectivamente tales que

$$\begin{gathered} v_{\lambda_n} \xrightarrow{H_{-1}} 0 \\ w_{\lambda_n} \xrightarrow{H_1} u_0 \end{gathered}$$

ambas convergencias en el sentido fuerte. Es facil ver de la continuidad de $L_\mu : H_1 \to H_{-1}$ que

$$L_\mu u_0 = g \quad \text{en} \quad H_{-1}.$$

Luego

$$(L_\mu u_0, u_0) = (g, u_0)$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{\lambda \to 0} \lambda\|u_\lambda\|_0^2 = 0.$$

Nota 4. El teorema 5 fue aplicado por Varadhan en [4] para demostrar el teorema del límite central para una partícula marcada en el proceso de exclusión simple donde la hipótesis de simetría de las tasas en el teorema 4 es reemplazada por la hipótesis de media cero,

$$\sum_{y \in \mathbf{Z}^d} p(x,y)y = 0$$

Allí él demuestra que la parte asimétrica del generador satisface la desigualdad 10.0. Para la tensión en el principio de invarianza debe recurrir a propiedades particulares del proceso.

Nota 5. Como un resultado preliminar Sethuraman, Varadhan y Yau [6] han logrado demostrar el teorema del límite central para una partícula marcada en el proceso de exclusión simple en $d \geq 3$ y sin ninguna hipótesis de media cero sobre las tasas. En este caso la parte asimétrica del generador no se puede extender como un operador acotado de H_1 a H_{-1}. Sin embargo, es posible hacer una descomposición ortogonal del espacio H_0 en subespacios H_n de modo que: (i) H_n son invariantes bajo la acción de la parte simétrica del generador; (ii) la parte asimétrica del generador se puede extender como un operador acotado de H_n a H_{-1}. Luego, via técnicas perturbativas demuestran que la solución u_λ de la ecuación de la resolvente del generador tiene la propiedad

$$\sup_{\lambda > 0} ||\lambda u_\lambda||_{-1} < \infty$$

Observando la demostración del teorema 6 se puede ver que esta propiedad es suficiente para el teorema del límite central.

6. Referencias.

[**1**] C. Kipnis and S.R.S. Varadhan, *Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and application to simple exclusion*, Comm. Math. Phys. Vol. **104**, 1-19, 1986.

[**2**] T. Liggett, *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, 1985.

[**3**] S. Olla, *Homogenization of diffusions*, Ecole Polytechnique, 1994.

[**4**] S.R.S. Varadhan, *Self Diffusion of a tagged particle in equilibrium for assymmetric mean zero random walk with simple exclusion*, Ann. Inst. Henri Poincaré Vol. **31**, n^o 1, 273-285, 1995.

[**5**] R. Arratia, *The motion of a tagged particle in the simple symmetric exclusion system on Z*, Ann. Probab. **11**, 362-373, 1983.

[**6**] S. Sethuraman, S.R.S. Varadhan, H.T. Yau, preprint 1997.